Martin Erik HORN, Berlin

Ein physikalisch motivierter Weg zur Konformen Geometrie

Mit Hilfe der Mathematik können wir physikalische Beziehungen sachangemessen abstrakt beschreiben. Spätestens seit Galilei bestimmt diese Setzung das Verhältnis zwischen Physik und Mathematik: Vor einem Erlernen und Fassen der Physik auf einem über die Phänomene hinausgehenden Niveau steht ein Erlernen und Fassen der Mathematik durch die Lernenden.

In diesem Beitrag soll diese Reihung umgedreht werden. Bei manchen mathematisch abstrakten Konzeptbildungen – wie hier der Konformen Geometrie – kann eine vorherige Beschäftigung mit physikalischen Erscheinungen – wie hier der Speziellen Relativität – einen Lernerfolg fördern.

1. Geometrie des Lichts

Betrachten wir die Punkte P_1 und P_2 aus der Perspektive eines ruhenden Beobachters, dessen Weltlinie mit der Zeit-Achse des abgebildeten Minkowski-Diagramms überein stimmt (Abb. 1a). Obwohl das Raumzeit-Inter-

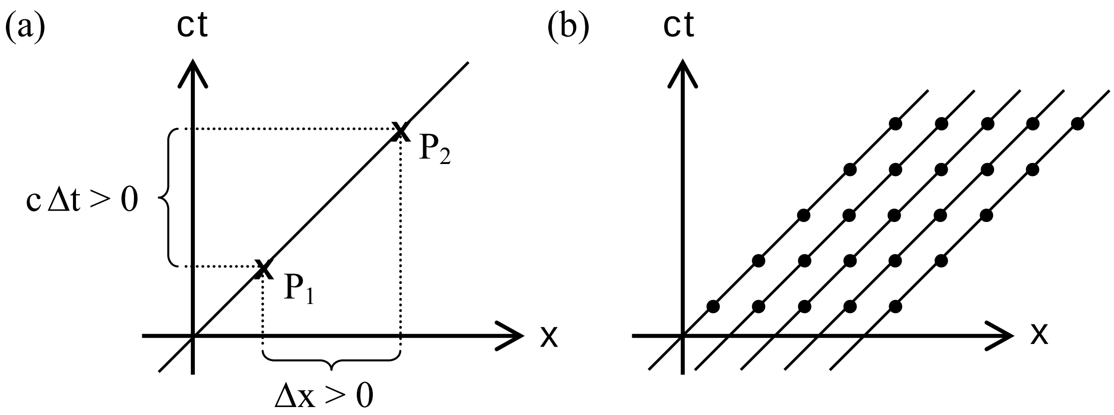

Abb. 1: Minkowski-Diagramme von Raumzeit-Punkten mit verschwindenden raumzeitlichen Abständen

vall und damit der raumzeitliche Abstand

$$(c\,\gamma_t\,(t_2 - t_1) + \gamma_x\,(x_2 - x_1))^2 = c^2\,\Delta t^2 - \Delta x^2 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad c\,\Delta t = \pm\,\Delta x$$

zu Null verschwindet, existieren für einen ruhenden Beobachter ein räumlicher Abstand $\Delta x > 0$ und ein zeitlicher Abstand $\Delta t > 0$, die beide größer als Null sind. Mit Hilfe eines Maßbandes und einer Uhr kann ein solcher Beobachter mithin diese räumlichen und zeitlichen Abstände messen. Für ihn sind P_1 und P_2 zwei verschiedene, eindeutig unterscheidbare Punkte.

Dies gilt jedoch nicht für das Licht. Je schneller ein Beobachter sich bewegt, desto geringer wird aufgrund der relativistischen Zeitdilatation und

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 559–562). Münster: WTM-Verlag

Längenkontraktion der von ihm gemessene räumliche und zeitliche Abstand. Im Grenzfall einer Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit, wie sie Lichtteilchen (Photonen) ausführen, schrumpft der räumliche und zeitliche Abstand auf Null. Photonen können mit einer hypothetisch mitgeführten Messapparatur keinen räumlichen oder zeitlichen Abstand zwischen den Raumzeit-Punkten P_1 und P_2 messen. Für Licht sind P_1 und P_2 identisch.

Wir müssen deshalb schlussfolgern: Wir als ruhende Beobachter sehen in Abbildung 1b genau 25 unterschiedliche Raumzeit-Punkte, während aus der Perspektive des Lichts hier nur fünf räumliche Punkte zu erkennen sind, die von uns als lichtartige Geraden wahrgenommen werden.

2. In zwei Schritten zur Konformen Geometrie

Genau diese seltsame Identifikation von räumlichen Punkten mit räumlichen Geraden und lichtartigen Geraden beschreibt den Wesenskern homogener und konformer Geometrien (siehe Abb. 2).

räumlicher Punkt .... *dreidimensionaler Raum*

räumliche Gerade ………………. *vierdimensionaler Raum*
(homogene Geometrie)

lichtartige Gerade ……… *fünfdimensionale Raumzeit*
(konforme Geometrie)

Abb. 2: Strategieschritte zur Konstruktion der Konformen Geometrischen Algebra

Folgen wir diesen die Dimension jeweils erhöhenden Schritten von Abb. 2, so können wir aus unserer dreidimensionalen, Euklidischen Welt eine zu ihr mathematisch äquivalente fünfdimensionale Licht-Welt konstruieren. In dieser lassen sich alle Punkte des dreidimensionalen Raums eineindeutig mit lichtartigen Geraden einer fünfdimensionalen Raumzeit identifizieren.

3. Physikalische Fundierung mathematischer Grundlagen

In der Geometrischen Algebra rechnen wir direkt mit physikalisch zugänglichen Grundgrößen: Vektoren als orientierte Strecken, Bivektoren als orientierte Flächenstücke, Trivektoren als orientierte Volumina. Es handelt sich dabei um eine *physikalische Geometrie* oder mehr noch um eine „physikalische Mathematik“ (Parra Serra 2009, Kap. 2), da auch eine *physikalische Algebra* sachlogisch in ihr enthalten ist. Dabei werden Pauli-Matrizen als Basisvektoren des dreidimensionalen Raumes und Dirac-Matrizen als Basisvektoren einer vierdimensionalen (Hestenes 2002 & 2003), (Doran & Lasenby 2003), (Horn 2010) oder fünfdimensionalen Raumzeit (Horn

2011) interpretiert. Die wesentlichen Grundlagen dieser physikbasierten Konzeptbildungen lauten nach (Parra Serra 2009, Absch. 2.2.1, S. 823):

- ***Physikalische Geometrie:*** Geometrische Objekte werden als reale Linearkombinationen der Basisvektoren und ihrer Produkte ausgedrückt.
- ***Physikalische Algebra:*** Basisvektoren antikommutieren $e_i e_j = - e_j e_i$ und quadrieren zu +1, –1 oder 0.

Werden räumlichen Basisvektoren positive Quadrate $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1$ zugeordnet, liefert die physikalisch motivierte Einführung einer zusätzlichen zeitlichen Dimension einen zeitartigen Basisvektor mit $e_-^2 = -1$. Diese Konzeptbildungen können konkret im Kontext der Speziellen Relativität diskutiert werden. Auch eine zusätzliche räumliche Dimension mit einem weiteren raumartigen Basisvektor $e_+^2 = 1$ kann im Sinne einer fünfdimensionalen Speziellen Relativität beschrieben wird.

4. Alles wird Eins: Kugelprojektion

Der Übergang von der Physik, in der zusätzliche Dimensionen (wie z.B. die Zeit) als real existierend gedacht werden, zur konformen Mathematik, findet nun nicht in einer Neufassung, sondern in einer Neuinterpretation dieser Konzepte ihren Ausdruck: Zusätzliche Dimensionen werden nun nicht als real existierend, sondern als lediglich dazuerfundene Hilfsmittel zur Beschreibung dreidimensionaler Räume genutzt.

Dies geschieht in einem ersten Schritt durch eine Kugelprojektion. Jeder Punkt *x* des dreidimensionalen Raums kann mit einem Punkt *p*‘ (Abb. 3) auf der dreidimensionalen Oberfläche einer vierdimensionalen Kugel identifiziert werden (Vince 2008, Kap.11), (Doran & Lasenby 2003, Kap. 10):

$$p' = \frac{x^2 e_+ + 2x - e_+}{1 + x^2}$$

Die homogene Gerade verläuft dann durch diesen Punkt: Jeder Punkt des Dreidimensionalen wird somit mit einer räumlichen Gerade identifiziert.

5. Alles wird Null – Alles wird Licht

Die konforme Gerade wird nun gebildet, indem zu p‘ der zu *p*‘ orthogonale Basisvektor e_- einer zusätzlichen zeitlichen Richtung addiert wird:

$$p'' = \frac{x^2 e_+ + 2x - e_+}{1 + x^2} + e_- \qquad \frac{1 + x^2}{2} p'' = p = x + \frac{1}{\sqrt{2}} x^2 e_\infty + \frac{1}{\sqrt{2}} e_0$$

Jeder Punkt des Dreidimensionalen wird somit mit einer lichtartigen Geraden identifiziert, da der Vektor *p*, der aus Darstellungsgründen skaliert

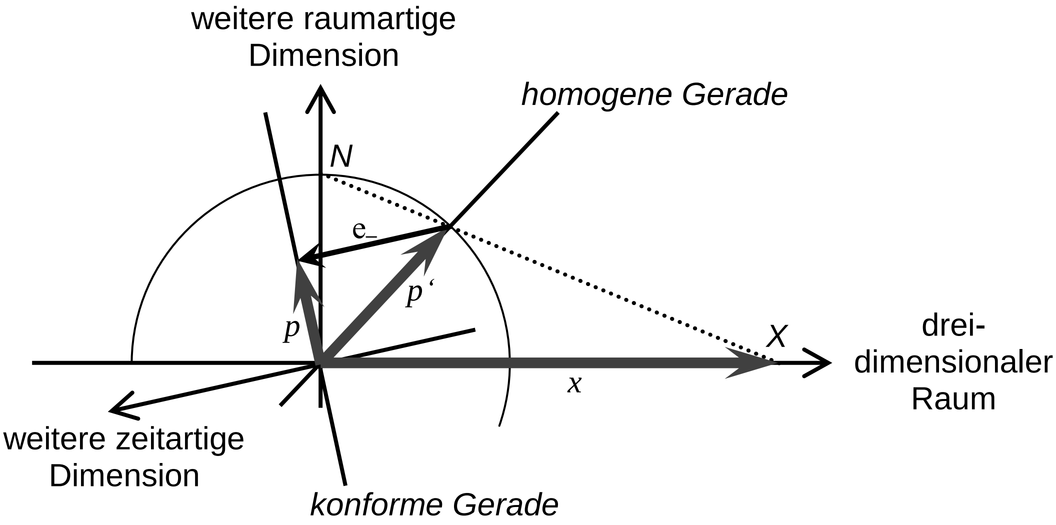

Abb. 3: Konstruktion der homogenen und konformen Geraden

wurde (rechte Gleichung), die raumzeitliche Länge Null aufweist: $p^2 = 0$. Ebenfalls aus Darstellungsgründen werden die Linearkombinationen

$$e_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_- + e_+) \qquad \text{und} \qquad e_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_- - e_+)$$

eingeführt, die in dieser konformen Geometrie den ins Unendliche weisenden Vektor und den Ursprung des Dreidimensionalen repräsentieren.

6. Ein mathematisch-physikalischer Goldschatz

Mit der Konformen Geometrischen Algebra haben wir einen Goldschatz gefunden, der Kugeln und Kreise erstaunlich einfach beschreibt, und der physikalische mit mathematischen Konzepten eng verknüpft. Denn die Geometrie von Nullvektoren spiegelt sich in der Geometrie von Licht.

Literatur

Doran, Ch. & Lasenby, A. (2003). Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: CUP.

Hestenes, D. (2002). New Foundations for Classical Mechanics. New York: Kluwer.

Hestenes, D. (2003). Spacetime Physics with Geometric Algebra. American Journal of Physics, Vol. 71, No. 7, S. 691-714.

Horn, M. E. (2010). Die Spezielle Relativitätstheorie in der Mathematikerausbildung. PhyDid B – Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Hannover, Beitrag 19.35.

Horn, M. E. (2011). Die fünfdimensionale Welt der Kosmologischen Relativität. In: D. Höttecke (Hrsg.). GDCP-Tagungsband 31. Berlin: LIT-Verlag, S. 158-160.

Parra Serra, J. M. (2009). Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. Advances in Applied Clifford Algebras, Vol. 19, No. 3/4, S. 819-834.

Vince, J. (2008): Geometric Algebra for Computer Graphics. London, Berlin: Springer.